MACERATA
Istituto Tecnico Commerciale "A. Gentili"
Progetto Accoglienza a.s. 2010–2011

GEOMETRIA... QUESTA SCONOSCIUTA

Prof. **Federico Greco**

Università degli Studi di Perugia

13–20 settembre 2010

CHE COSA È LA MATEMATICA?

CHE COSA È LA MATEMATICA?

Matematica	*cose che sono oggetto di apprendimento*
‘matematico’	*colui che è incline ad apprendere*

Matematica *cose che sono oggetto di apprendimento*

'matematico' *colui che è incline ad apprendere*

In giro si sente dire che:

- la matematica è lo studio [la scienza] dei numeri e la geometria è lo studio delle figure;
- la matematica è una scienza esatta;
- la matematica è la regina delle scienze.

CHE COSA È LA MATEMATICA?

Matematica *cose che sono oggetto di apprendimento*
'matematico' *colui che è incline ad apprendere*

In giro si sente dire che:

- la matematica è lo studio [la scienza] dei numeri e la geometria è lo studio delle figure;
- la matematica è una scienza esatta;
- la matematica è la regina delle scienze.

Le ultime due non definiscono l'oggetto della matematica, ma ne danno solo caratteristiche **presunte**
La prima è una definizione solo parzialmente corretta

CHE COSA NON È LA MATEMATICA?

Nell'opinione comune la matematica è associata ai numeri e a **operazioni noiose** come

$$32453 \times 98,234 - 10023453,245$$

Notate bene: anche i matematici le ritengono noiose

Il termine **ESATTA** riferito alla matematica spesso significa

- fredda
- senza sorprese
- materia in cui si opera senza fantasia

CHE COSA NON È LA MATEMATICA?

Nell'opinione comune la matematica è associata ai numeri e a **operazioni noiose** come

$$32453 \times 98,234 - 10023453,245$$

Notate bene: anche i matematici le ritengono noiose

Il termine **ESATTA** riferito alla matematica spesso significa

- fredda
- senza sorprese
- materia in cui si opera senza fantasia

La matematica è spesso considerata **utile solo se applicata** ad altri campi di indagine (fisica, economia, superenalotto, prezzo delle pere, etc...)

Definizione

L'**aritmetica** (da una parola greca che vuol dire *cose che hanno a che fare con i numeri*) è il settore della matematica che studia le regole per sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere due numeri tra loro.

VERSO UNA DEFINIZIONE DIVERSA...

DEFINIZIONE

L'**aritmetica** (da una parola greca che vuol dire *cose che hanno a che fare con i numeri*) è il settore della matematica che studia le regole per sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere due numeri tra loro.

DEFINIZIONE

La **geometria** (da una parola greca che vuol dire *misurazione dei terreni*) è il settore della matematica che studia figure, curve e superfici, le loro proprietà [forma, lunghezza, estensione], ma anche come cambiano queste proprietà se le figure sono sottoposte a traslazioni, rotazioni, simmetrie, etc.

VERSO UNA DEFINIZIONE DIVERSA...

DEFINIZIONE

L'**aritmetica** (da una parola greca che vuol dire *cose che hanno a che fare con i numeri*) è il settore della matematica che studia le regole per sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere due numeri tra loro.

DEFINIZIONE

La **geometria** (da una parola greca che vuol dire *misurazione dei terreni*) è il settore della matematica che studia figure, curve e superfici, le loro proprietà [forma, lunghezza, estensione], ma anche come cambiano queste proprietà se le figure sono sottoposte a traslazioni, rotazioni, simmetrie, etc.

La matematica non coincide né con l'aritmetica, né con la geometria. La matematica ha tanti altri settori: algebra (astratta), logica, teoria degli insiemi, calcolo delle probabilità, analisi, etc...

VERSO UNA DEFINIZIONE DIVERSA...

Cosa serve di fronte a un esercizio [problema,espressione] di matematica?

1. Capire cosa chiede il problema e, se aiuta, darne una rappresentazione grafica;
2. Saper individuare le regole da usare nella risoluzione;
3. Applicare e combinare correttamente le regole;
4. Verificare se il risultato ottenuto è compatibile con la richiesta.

VERSO UNA DEFINIZIONE DIVERSA...

Cosa serve di fronte a un esercizio [problema,espressione] di matematica?

1. Capire cosa chiede il problema e, se aiuta, darne una rappresentazione grafica;
2. Saper individuare le regole da usare nella risoluzione;
3. Applicare e combinare correttamente le regole;
4. Verificare se il risultato ottenuto è compatibile con la richiesta.

Bisogna **ragionare** sul problema, risolverlo correttamente attraverso il **calcolo** e **controllare** il risultato.

La parola ‘calcolo’ va intesa in senso esteso: non vuol dire solo **saper fare le operazioni aritmetiche**, ma anche **saper applicare nel giusto ordine le regole che servono alla soluzione**.

Esempio

Nel risolvere un'espressione bisogna saper combinare tra loro la regola delle parentesi, la regola che stabilisce l'ordine con cui eseguire le operazioni e le regole delle potenze.

$$
\begin{aligned}
& 3 - [(4-2) \times 2^3] : 2^4 + 5 \times 3 = \\
= \quad & 3 - [2 \times 2^3] : 2^4 + 5 \times 3 = \\
= \quad & 3 - [2^4] : 2^4 + 5 \times 3 = \\
= \quad & 3 - 1 + 5 \times 3 = \\
= \quad & 3 - 1 + 15 = \\
= \quad & 17
\end{aligned}
$$

Esempio

Nel risolvere un problema di geometria è necessario saper combinare formule aritmetiche e risultati noti (**teoremi**) per poter ottenere la soluzione del problema richiesto.

In un triangolo ABC la somma degli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ è $96°$, la loro differenza è $16°$. Determinare l'ampiezza dei tre angoli.

Svolgimento:

$$\widehat{A} = (96° + 16°)/2 = 112°/2 = 56°$$

$$\widehat{B} = (96° - 16°)/2 = 80°/2 = 40°$$

$$\widehat{C} = 180° - 96° = 84° \qquad \text{[dal noto teorema]}$$

La matematica è la scienza del ragionamento e del calcolo

Per chi non è matematico di professione è una buona definizione.
Purché per ‘calcolo’ si intenda saper applicare nel giusto ordine le regole che servono alla soluzione di un esercizio [problema,espressione] e non solo saper ‘fare i conti’ che servono a capire se il negoziante ci ha dato il resto giusto o no.

Per me che lavoro da un po’ con la matematica,

La matematica è la scienza dei modelli

ALLORA ... CHE COSA È 'STA MATEMATICA?

Per me che lavoro da un po' con la matematica,

La matematica è la scienza dei modelli

Il matematico nel tentativo di risolvere un problema nuovo cerca, innanzitutto, di vedere se ci sono cose in comune con altri problemi già risolti. Altrimenti cerca un nuovo metodo di soluzione.

Fa come un **sarto** che, per prima cosa, vede se un **vecchio modello** si può adattare alla nuova necessità.
Altrimenti **ne cuce uno tutto nuovo**.

In realtà 'modello' in matematica ha una definizione molto rigorosa

Il **succo della matematica** sta proprio nel

- non dare mai niente per scontato
- mettere in discussione le regole
- proporre altre regole
- **creare nuovi modelli**

Il **succo della matematica** sta proprio nel

- non dare mai niente per scontato
- mettere in discussione le regole
- proporre altre regole
- **creare nuovi modelli**

I nuovi modelli servono ad AMPLIARE e a GENERALIZZARE e possono mischiare settori diversi [ASSI CARTESIANI], ispirarsi a fenomeni naturali [ALGORITMI GENETICI]...

La matematica è una scienza umana, viva ed imprevedibile.

La capacità di astrarre è una caratteristica della specie umana. Fare matematica senza astrazione è impossibile, ma...

L’abilità del matematico risiede nell’applicare con familiarità l’astrazione alle strutture matematiche

La capacità di astrarre è una caratteristica della specie umana. Fare matematica senza astrazione è impossibile, ma...

L’abilità del matematico risiede nell’applicare con familiarità l’astrazione alle strutture matematiche

Non a caso il matematico è visto come una persona ‘quadrata’ che razionalizza tutto, che ha sempre la testa tra le nuvole e che non riesce ad affrontare problemi pratici...

Ciascuno di noi può essere più o meno capace di lavorare con l'astrazione sulle strutture matematiche, però...

Per capire meglio la matematica, gli studenti devono chiedersi all'inizio di ogni nuovo argomento, che relazione c'è con gli argomenti precedentemente trattati e studiati, quali sono le **ANALOGIE**, le somiglianze e quali le differenze.

Ciascuno di noi può essere più o meno capace di lavorare con l'astrazione sulle strutture matematiche, però...

Per capire meglio la matematica, gli studenti devono chiedersi all'inizio di ogni nuovo argomento, che relazione c'è con gli argomenti precedentemente trattati e studiati, quali sono le **ANALOGIE**, le somiglianze e quali le differenze.

SOMMA

Che differenza c'è tra sommare due numeri naturali, due interi, due numeri razionali, due segmenti, due angoli o le ore dell'orologio?
Quali proprietà hanno in comune questi modi di sommare? Quali no?

ASSI CARTESIANI

Modello di piano che mette insieme la geometria euclidea e l'algebra delle equazioni

I settori della matematica NON sono distinti. Ciò che si impara in aritmetica e in algebra serve in geometria e viceversa.

ASSI CARTESIANI

Modello di piano che mette insieme la geometria euclidea e l'algebra delle equazioni

I settori della matematica NON sono distinti. Ciò che si impara in aritmetica e in algebra serve in geometria e viceversa.
Ciò che si impara in logica, in teoria degli insiemi e si sperimenta già dalle medie in geometria (euclidea) serve ovunque. Perché

ciò che accomuna tutti i settori è il **MODO DI RAGIONARE**, basato sul **METODO ASSIOMATICO-DEDUTTIVO**

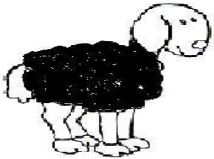
INTERVALLO

LE PECORE DELLA SCOZIA

Un matematico, un fisico ed un ingegnere stanno attraversando in treno una landa scozzese. In un campo scorgono otto pecore. L'ingegnere, guardandole, dice: 'Dal fatto che queste pecore sono tutte di color nero potremmo dedurre che le pecore della Scozia sono nere.' Il fisico osserva: 'In realtà, possiamo solo dedurre che in Scozia ci sono otto pecore di color nero.'

LE PECORE DELLA SCOZIA

Un matematico, un fisico ed un ingegnere stanno attraversando in treno una landa scozzese. In un campo scorgono otto pecore. L'ingegnere, guardandole, dice: 'Dal fatto che queste pecore sono tutte di color nero potremmo dedurre che le pecore della Scozia sono nere.' Il fisico osserva: 'In realtà, possiamo solo dedurre che in Scozia ci sono otto pecore di color nero.'

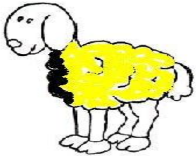


LE PECORE DELLA SCOZIA

... Il matematico chiosa: ‘Vi sbagliate entrambi. Possiamo solo dedurre che in Scozia esistono almeno otto pecore e che la parte di queste otto pecore che a noi è visibile è di color nero.’

LE PECORE DELLA SCOZIA

... Il matematico chiosa: ‘Vi sbagliate entrambi. Possiamo solo dedurre che in Scozia esistono almeno otto pecore e che la parte di queste otto pecore che a noi è visibile è di color nero.’



La geometria EUCLIDEA

La geometria che si studia alle scuole medie e nel primo biennio delle scuole superiori si chiama **GEOMETRIA EUCLIDEA**.

Euclide, matematico greco del III sec. a.C., volle fornire ai suoi studenti del Museo di Alessandria un manuale ‘introduttivo’ di geometria. Raccolse in un trattato molti dei risultati allora noti e li organizzò in modo rigoroso.

La geometria che si studia alle scuole medie e nel primo biennio delle scuole superiori si chiama **GEOMETRIA EUCLIDEA**.

Euclide, matematico greco del III sec. a.C., volle fornire ai suoi studenti del Museo di Alessandria un manuale ‘introduttivo’ di geometria. Raccolse in un trattato molti dei risultati allora noti e li organizzò in modo rigoroso.

OGGETTO	Gli enti geometrici e le loro proprietà;
OBIETTIVO-1	Dare definizioni rigorose di enti geometrici e proprietà
OBIETTIVO-2	Mettere in relazione tra loro enti e proprietà, cioè dimostrare quando un particolare ente geometrico possiede una particolare proprietà
METODO	**metodo assiomatico-deduttivo**

TRIANGOLO ISOSCELE

Il **triangolo** è un ENTE geometrico e l'essere **isoscele** è una sua possibile PROPRIETÀ.

Per definizione... Un triangolo è isoscele se *i suoi lati obliqui sono congruenti*.

Si dimostra che... Un triangolo è isoscele se e solo se i *suoi angoli alla base sono congruenti*.

Definizioni e dimostrazioni hanno bisogno di fondamenta. Quindi, non possiamo definire o dimostrare tutto...

Come si definiscono gli ENTI GEOMETRICI?

$\swarrow$ $\searrow$

FONDAMENTALI (**punto**, **retta**, **piano**): definiti in modo intuitivo e non rigoroso

NON FONDAMENTALI: definiti in modo rigoroso attraverso le proprietà di altri enti già definiti

Come si definiscono gli ENTI GEOMETRICI?

↙ ↘

FONDAMENTALI (**punto**, **retta**, **piano**): definiti in modo intuitivo e non rigoroso

NON FONDAMENTALI: definiti in modo rigoroso attraverso le proprietà di altri enti già definiti

Come si definiscono le PROPRIETA' degli enti?

↙ ↘

L'**appartenenza** e la **congruenza** sono definite in modo intuitivo e non rigoroso

Le altre sono definite in modo rigoroso attraverso le proprietà o enti già definiti

Analogie con gli insiemi

punto, **retta**, **piano** possono essere definiti non rigorosamente come
-qualcosa che non ha parti
-qualcosa che ha solo lunghezza
-qualcosa che ha lunghezza e profondità.

Allo stesso modo in teoria degli insiemi vedrete che **insieme** ed **elemento** possono essere definiti solo in modo non rigoroso

ENTI NON FONDAMENTALI

semiretta: ‘Ciascuna delle parti in cui viene divisa una retta da un punto ad essa appartenente’.

[la definizione usa gli enti *punto* e *retta* e la proprietà di *appartenenza* che mette in relazioni punti e rette.]

ENTI NON FONDAMENTALI

semiretta: ‘Ciascuna delle parti in cui viene divisa una retta da un punto ad essa appartenente’.

[la definizione usa gli enti *punto* e *retta* e la proprietà di *appartenenza* che mette in relazioni punti e rette.]

ENTI NON FONDAMENTALI

angolo: ‘Porzione di piano racchiusa tra due semirette aventi in comune l’origine’

[la definizione usa gli enti semiretta e origine di una semiretta.]

Proprietà degli enti

L'**appartenenza** è la proprietà che stabilisce le gerarchie: i punti sono gli *elementi* dell'*insieme* retta, le rette sono gli *elementi* dell'*insieme* piano.

E' la stessa proprietà che si introduce in teoria degli insiemi, anche lì definita in modo intuitivo e **non** rigoroso.

PROPRIETÀ DEGLI ENTI

L'**appartenenza** è la proprietà che stabilisce le gerarchie: i punti sono gli *elementi* dell'*insieme* retta, le rette sono gli *elementi* dell'*insieme* piano.

E' la stessa proprietà che si introduce in teoria degli insiemi, anche lì definita in modo intuitivo e **non** rigoroso.

PROPRIETÀ DEGLI ENTI

incidenza: 'Due rette sono incidenti se hanno solo un punto in comune (solo un punto appartiene ad entrambe)'.

[la definizione usa gli enti *punto*, *retta*, la proprietà *appartenenza* ed è data in modo rigoroso]

Come si dimostra che alcuni ENTI hanno una data PROPRIETA'?

ASSIOMI: Proprietà 'evidenti' che sono assunte come vere e non sono dimostrate;

TEOREMI: Proprietà che sono dimostrate attraverso un ragionamento deduttivo.

Come si dimostra che alcuni ENTI hanno una data PROPRIETA'?

ASSIOMI: Proprietà 'evidenti' che sono assunte come vere e non sono dimostrate;

TEOREMI: Proprietà che sono dimostrate attraverso un ragionamento deduttivo.

Struttura che si ripete

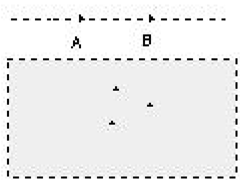
La definizione degli enti, la definizione delle proprietà e le dimostrazioni rispecchiano sempre la stessa struttura:

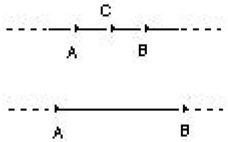
- alcune definizioni sono date in modo intuitivo ed alcune cose sono ritenute vere perché non in contrasto con l'esperienza (le fondamenta).
- tutto il resto deve essere definito o dimostrato in modo rigoroso a partire dalle cose già definite o dimostrate (la casa).

ASSIOMI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

I primi quattro *ASSIOMI* che presentiamo riassumono proprietà ovvie per come siamo abituati a pensare punti, rette e piani:

- Per **due punti** distinti passa *una e una sola retta*;
- Per **tre punti** non allineati passa *uno e un solo piano*;
- Una **retta** contiene *infiniti punti* [Dati due punti distinti A e B di una retta, c'è sempre un terzo punto C compreso tra A e B];
- Un **segmento** può essere *prolungato* in modo da formare una retta;





Ecco gli ultimi tre *ASSIOMI* che presentiamo:

- E' possibile tracciare una **circonferenza** con *centro* un punto dato e con *raggio* una misura assegnata;
- Tutti gli **angoli retti** sono *congruenti*;
- Per un **punto esterno ad una retta** data passa *una ed una sola retta parallela* alla retta data.

I primi due assiomi sono tecnici.
L'ultimo, noto come *Quinto Postulato di Euclide*, ha una grande importanza storica.
E' una PECORA NERA da una parte e GIALLA dall'altra...

Tutte le cose che non sono stabilite dagli assiomi devono essere dimostrate in modo rigoroso attraverso i TEOREMI. Un teorema ha questo schema

$$\text{IPOTESI} \qquad \underset{\text{DIMOSTRAZIONE}}{\Longrightarrow} \qquad \text{TESI}$$

I TEOREMI

Tutte le cose che non sono stabilite dagli assiomi devono essere dimostrate in modo rigoroso attraverso i TEOREMI. Un teorema ha questo schema

$$\text{IPOTESI} \quad \underset{\text{DIMOSTRAZIONE}}{\Longrightarrow} \quad \text{TESI}$$

Cerchiamo di studiare più da vicino il più famoso Teorema della matematica e scopriremo come attraverso una comprensione della dimostrazione saremo in grado di generalizzarlo...

Il teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora è uno dei più importanti e noti teoremi della geometria (euclidea). A molti anni di distanza molta gente ricorda ancora che...

TEOREMA

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sopra l'ipotenusa (c) è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra i cateti (a e b).

Il teorema di Pitagora: enunciato

Il teorema di Pitagora è uno dei più importanti e noti teoremi della geometria (euclidea). A molti anni di distanza molta gente ricorda ancora che...

Teorema

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sopra l'ipotenusa (c) è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra i cateti (a e b).

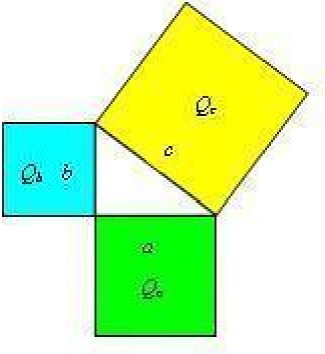
Da cui si ricava la relazione

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ma vi siete mai chiesti perché vale il teorema?
Cerchiamo una **dimostrazione grafica**...

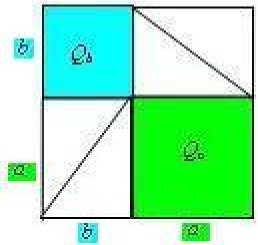
Il teorema di Pitagora: enunciato

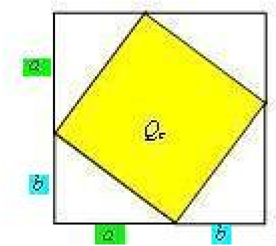
Il teorema afferma che l'area del quadrato giallo Q_c è pari alla somma delle aree dei quadrati celeste Q_b e verde Q_a



IL TEOREMA DI PITAGORA: DIMOSTRAZIONE

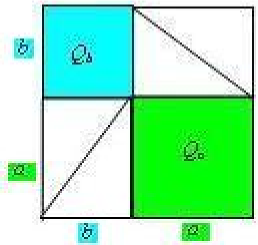
Ci costruiamo due quadrati più grandi, uno contenente i due quadrati Q_a e Q_b ed uno contenente il quadrato giallo Q_c. I due quadrati costruiti sono equivalenti perché hanno entrambi lato $a + b$.

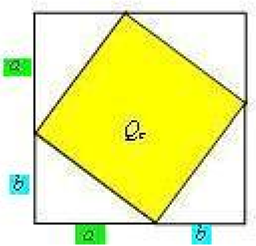




Il teorema di Pitagora: dimostrazione

Ci costruiamo due quadrati più grandi, uno contenente i due quadrati Q_a e Q_b ed uno contenente il quadrato giallo Q_c. I due quadrati costruiti sono equivalenti perché hanno entrambi lato $a + b$.





I quattro triangoli del primo quadrato ed i quattro del secondo quadrato sono tutti equivalenti al triangolo rettangolo di partenza perché sono rettangoli ed i loro cateti misurano a e b.

Se indichiamo con T il triangolo rettangolo da cui siamo partiti, dal confronto delle aree dei quadrati ricaviamo che:

$$Area(Q_a) + Area(Q_b) + 4 \cdot Area(T) = Area(Q_c) + 4 \cdot Area(T)$$

Se indichiamo con T il triangolo rettangolo da cui siamo partiti, dal confronto delle aree dei quadrati ricaviamo che:

$$Area(Q_a) + Area(Q_b) + 4 \cdot Area(T) = Area(Q_c) + 4 \cdot Area(T)$$

Poiché a sinistra e destra sto sommando una stessa quantità $4 \cdot Area(T)$, dalla proprietà invariantiva ricaviamo che

$$Area(Q_a) + Area(Q_b) = Area(Q_c)$$

Se indichiamo con T il triangolo rettangolo da cui siamo partiti, dal confronto delle aree dei quadrati ricaviamo che:

$$Area(Q_a) + Area(Q_b) + 4 \cdot Area(T) = Area(Q_c) + 4 \cdot Area(T)$$

Poiché a sinistra e destra sto sommando una stessa quantità $4 \cdot Area(T)$, dalla proprietà invariantiva ricaviamo che

$$Area(Q_a) + Area(Q_b) = Area(Q_c)$$

Calcolando le aree ricaviamo che

$$a^2 + b^2 = c^2$$

... Pitagora allora non ci ha preso in giro!

I am, as you can see, $a^2 + b^2 - ab$
When two triangles on me stand,
Square of hypothenuse is planned
But if I stand on them instead
The squares of both sides are read.

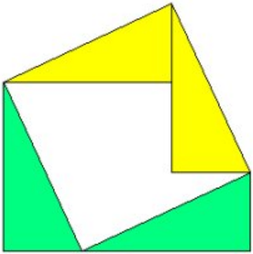
Come potete veder, son qui: $a^2 + b^2 - ab$
Se due triangoli sono sopra di me
Il quadrato dell'ipotenusa c'è
E se questi di sotto invece stanno
I quadrati dei cateti si hanno

Sir George Airy (1801-1892), astronomo

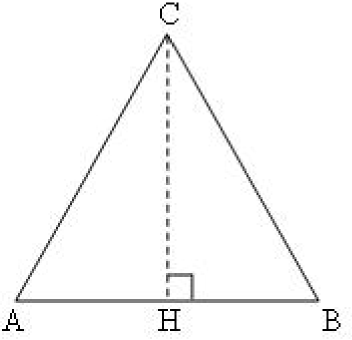
I am, as you can see, $a^2 + b^2 - ab$
When two triangles on me stand,
Square of hypothenuse is planned
But if I stand on them instead
The squares of both sides are read.

Come potete veder, son qui: $a^2 + b^2 - ab$
Se due triangoli sono sopra di me
Il quadrato dell'ipotenusa c'è
E se questi di sotto invece stanno
I quadrati dei cateti si hanno

Sir George Airy (1801-1892), astronomo



In un triangolo equilatero ABC tracciando l'altezza CH relativa alla base AB si ottiene un triangolo rettangolo HBC.



Rispetto alla misura di $\overline{AB}$,

$$\overline{BC} = \overline{AB}$$

$$\overline{HB} = \overline{AB}/2$$

Applicando il teorema di Pitagora si ricava:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2}$$

Facciamo una tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo gli altri **lati** del triangolo HBC ed il **rapporto** tra la misura $\overline{CH}$ e la misura $\overline{AB}$
[misuriamo quante unità $\overline{AB}$ contiene CH]

$\overline{AB}$		1	2	4	8

Facciamo una tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo gli altri **lati** del triangolo *HBC* ed il **rapporto** tra la misura $\overline{CH}$ e la misura $\overline{AB}$
[misuriamo quante unità $\overline{AB}$ contiene CH]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{BC}$	$= \overline{AB}$	1	2	4	8

Facciamo una tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo gli altri **lati** del triangolo HBC ed il **rapporto** tra la misura $\overline{CH}$ e la misura $\overline{AB}$
[misuriamo quante unità $\overline{AB}$ contiene CH]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{BC}$	$= \overline{AB}$	1	2	4	8
$\overline{HB}$	$= \overline{AB}/2$	0,5	1	2	4

Facciamo una tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo gli altri **lati** del triangolo *HBC* ed il **rapporto** tra la misura $\overline{CH}$ e la misura $\overline{AB}$
[misuriamo quante unità $\overline{AB}$ contiene CH]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{BC}$	$= \overline{AB}$	1	2	4	8
$\overline{HB}$	$= \overline{AB}/2$	0,5	1	2	4
$\overline{CH}$	$= \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2}$	0,866...	1,732...	3,464...	6,928..

Facciamo una tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo gli altri **lati** del triangolo *HBC* ed il **rapporto** tra la misura $\overline{CH}$ e la misura $\overline{AB}$
[misuriamo quante unità $\overline{AB}$ contiene *CH*]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{BC}$	$=\overline{AB}$	1	2	4	8
$\overline{HB}$	$=\overline{AB}/2$	0,5	1	2	4
$\overline{CH}$	$=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{HB}^2}$	0,866...	1,732...	3,464...	6,928..
$\overline{CH}/\overline{AB}$		0,866...	0,866...	0,866...	0,866...

Il rapporto $\overline{CH}/\overline{AB}$ è sempre 0,866... Perché?

Il rapporto $\overline{CH}/\overline{AB}$ è sempre 0,866... Perché?

Visto che è sempre uguale vediamo cosa succede nel caso $\overline{AB} = 2$. Si ha che

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - (\overline{AB}/2)^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = 1,732...$$

e, quindi,

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866...$$

Il rapporto $\overline{CH}/\overline{AB}$ è sempre 0,866... Perché?

Visto che è sempre uguale vediamo cosa succede nel caso $\overline{AB} = 2$. Si ha che

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - (\overline{AB}/2)^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = 1,732...$$

e, quindi,

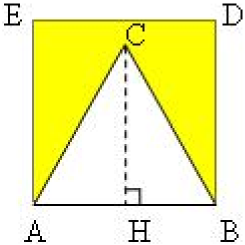
$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866...$$

TEOREMA

L'**altezza** in un **triangolo equilatero** si ottiene moltiplicando la misura del **lato** per il numero $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866...$

Abbiamo scoperto che il **rapporto** tra le misure di CH e AB è **costante**.

Disegniamo ora il quadrato $ABDE$ e confrontiamo le AREE del triangolo equilatero ABC e del quadrato $ABDE$.



$$Area(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$$

$$Area(ABDE) = \overline{AB}^2$$

Facciamo un'altra tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo l'area del triangolo ABC e l'area del quadrato $ABDE$ (in cm^2) e calcoliamo il loro **rapporto**
[misuriamo di quante unità $\overline{AB}^2$ è costituita l'area di ABC]

$\overline{AB}$		1	2	4	8

Facciamo un'altra tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo l'area del triangolo ABC e l'area del quadrato $ABDE$ (in cm^2) e calcoliamo il loro **rapporto**
[misuriamo di quante unità $\overline{AB}^2$ è costituita l'area di ABC]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{CH}$	$= \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866...	1,732...	3,464...	6,928...

Facciamo un'altra tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo l'area del triangolo ABC e l'area del quadrato $ABDE$ (in cm^2) e calcoliamo il loro **rapporto**
[misuriamo di quante unità $\overline{AB}^2$ è costituita l'area di ABC]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{CH}$	$=\overline{AB}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866...	1,732...	3,464...	6,928...
$Area(ABC)$	$=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2}$	0,433...	1,732...	6,928...	27,712...

Facciamo un'altra tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo l'area del triangolo ABC e l'area del quadrato $ABDE$ (in cm^2) e calcoliamo il loro **rapporto** [misuriamo di quante unità $\overline{AB}^2$ è costituita l'area di ABC]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{CH}$	$= \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866...	1,732...	3,464...	6,928...
$Area(ABC)$	$= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$	0,433...	1,732...	6,928...	27,712...
$Area(ABDE)$	$= \overline{AB}^2$	1	4	16	64

Facciamo un'altra tabella:

al variare della misura $\overline{AB}$ (in cm), misuriamo l'area del triangolo ABC e l'area del quadrato $ABDE$ (in cm^2) e calcoliamo il loro **rapporto**
[misuriamo di quante unità $\overline{AB}^2$ è costituita l'area di ABC]

$\overline{AB}$		1	2	4	8
$\overline{CH}$	$= \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866...	1,732...	3,464...	6,928...
$Area(ABC)$	$= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$	0,433...	1,732...	6,928...	27,712...
$Area(ABDE)$	$= \overline{AB}^2$	1	4	16	64
$\frac{Area(ABC)}{Area(ABDE)}$		0,433...	0,433...	0,433...	0,433...

Il rapporto $\dfrac{Area(ABC)}{Area(ABDE)}$ è sempre 0,433... Perché?

Il rapporto $\frac{Area(ABC)}{Area(ABDE)}$ è sempre 0,433... Perché?

Visto che è sempre uguale vediamo cosa succede nel caso $\overline{AB} = 2$. Si ha che

$$Area(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{2 \cdot 1,732...}{2} = 1,732... = \sqrt{3}$$

e, quindi,

$$\frac{Area(ABC)}{Area(ABDE)} = \frac{\sqrt{3}}{2^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433...$$

Il teorema di Pitagora: applicazione

Il rapporto $\frac{Area(ABC)}{Area(ABDE)}$ è sempre 0,433... Perché?

Visto che è sempre uguale vediamo cosa succede nel caso $\overline{AB} = 2$. Si ha che

$$Area(ABC) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{2 \cdot 1,732...}{2} = 1,732... = \sqrt{3}$$

e, quindi,

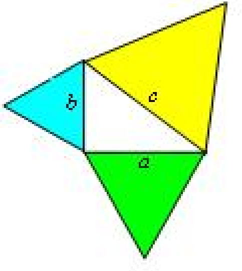
$$\frac{Area(ABC)}{Area(ABDE)} = \frac{\sqrt{3}}{2^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433...$$

Teorema

L'**area** in un **triangolo equilatero** si ottiene elevando al quadrato la misura del **lato** e moltiplicando il risultato per il numero fisso $\frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433...$

SECONDO VOI...

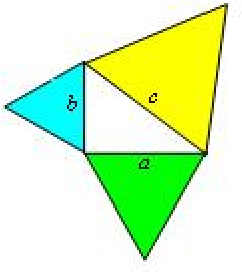
Dato un triangolo rettangolo, il triangolo equilatero costruito sopra l'ipotenusa è equivalente alla somma dei triangoli equilateri costruiti sopra i cateti?



La risposta è

SECONDO VOI...

Dato un triangolo rettangolo, il triangolo equilatero costruito sopra l'ipotenusa è equivalente alla somma dei triangoli equilateri costruiti sopra i cateti?



La risposta è SI'.

Per dimostrare che

$$T_c = T_a + T_b$$

bisogna usare la formula precedentemente ricavata [lato al quadrato per numero fisso 0,433...] e la relazione $c^2 = a^2 + b^2$.

Per dimostrare che

$$T_c = T_a + T_b$$

bisogna usare la formula precedentemente ricavata [lato al quadrato per numero fisso 0,433...] e la relazione $c^2 = a^2 + b^2$.
Infatti,

$$T_c = 0,433 \cdot c^2$$
$$T_a = 0,433 \cdot a^2$$
$$T_b = 0,433 \cdot b^2$$

Per dimostrare che

$$T_c = T_a + T_b$$

bisogna usare la formula precedentemente ricavata [lato al quadrato per numero fisso 0,433...] e la relazione $c^2 = a^2 + b^2$.
Infatti,

$$T_c = 0,433 \cdot c^2$$
$$T_a = 0,433 \cdot a^2$$
$$T_b = 0,433 \cdot b^2$$

e, quindi,

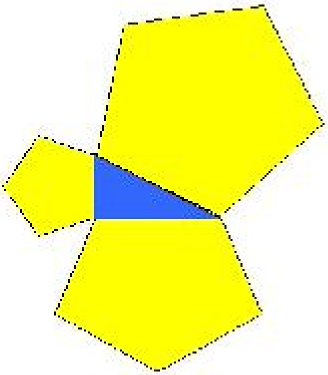
$$T_c = 0,433 \cdot c^2 = 0,433 \cdot (a^2 + b^2) = 0,433 \cdot a^2 + 0,433 \cdot b^2 = T_a + T_b$$

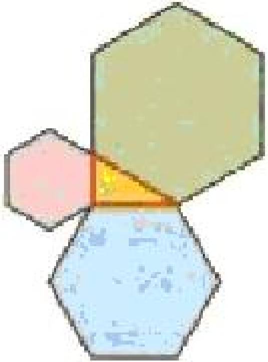
Il teorema di Pitagora: applicazione

Un analogo del teorema di Pitagora vale per tutti i poligoni regolari costruiti su ipotenusa e cateti perché ogni poligono regolare ha un numero fisso e, quindi, la sua area può trovare con la formula
lato $\times$ lato $\times$ numero fisso.

Il teorema di Pitagora: applicazione

Un analogo del teorema di Pitagora vale per tutti i poligoni regolari costruiti su ipotenusa e cateti perché ogni poligono regolare ha un numero fisso e, quindi, la sua area può trovare con la formula
lato $\times$ lato $\times$ numero fisso.



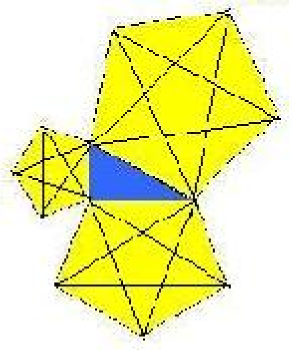


Note sui numeri fissi

Il numero fisso del triangolo equilatero è $0,433...$.
Il numero fisso del quadrato è 1.

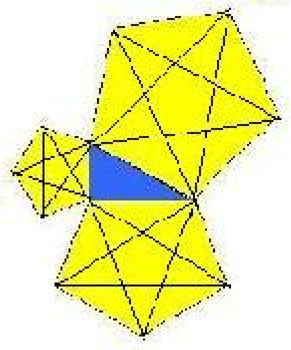
Il numero fisso dell'esagono regolare è pari a 6 volte il numero fisso del triangolo equilatero [perché l'esagono regolare è costituito da 6 triangoli equilateri].
Analoghe relazioni NON valgono per altri poligoni come il pentagono o l'ottagono [Mi raccomando!]

Un analogo del teorema di Pitagora vale per le stelle pentagonali...



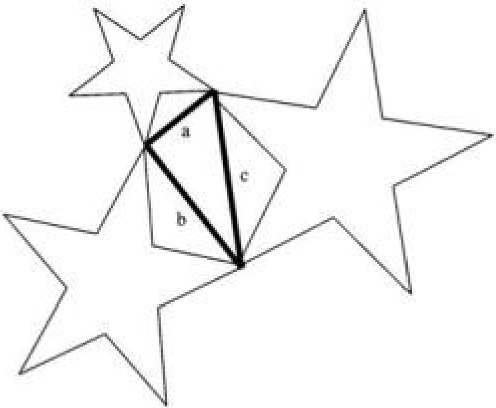
La somma delle stelle pentagonali...

Un analogo del teorema di Pitagora vale per le stelle pentagonali...

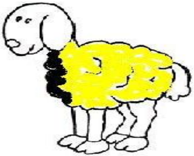


Anzi... Nei triangoli rettangoli la figura descritta sul lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sui lati che comprendono l'angolo retto.

LA SOMMA DELLE STELLE ESAGONALI...



Alla prossima
pecora GIALLA



Bye Bye!